Министерство образования Нижегородской области
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Шатковский агротехнический техникум»

Методические указания
для студентов заочной формы обучения
по специальности
35.02.08 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства
по дисциплине «Математика»

Шатки, 2016

Методические рекомендации составлены в соответствии с ФГОС по специальности 35.02.07 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства, рабочей программой по учебной дисциплине «Математика»

Согласована на заседании ПЦК профессиональной подготовки ГБПОУ ШАТТ.

Протокол заседания № 6 от «28» 10 20 16 г.

Председатель ПЦК ____________ /Н.А.Сашенко/

Автор ______________ /Д.В. Фокин – преподаватель ГБПОУ ШАТТ/

Рецензент ___________ /Н.В. Конкина – методист ГБПОУ ШАТТ/

Введение

Учебная дисциплина «Математика» предназначена для реализации ФГОС по специальности 35.02.08 Электрификация и автоматизация сельского хозяйства.

Данный курс является одним из основополагающих, формирующих необходимые базовые знания для освоения общепрофессиональных дисциплин.

На изучение дисциплины определено 72 часа, большая часть из которых отводится на самостоятельное изучение теоретического материала и освоение практических навыков по решению прикладных задач. Приобретенные навыки могут быть использованы в будущей практической деятельности техника-электрика.

В результате изучения дисциплины студент должен:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Данный курс представлен следующими разделами:

– «Математический анализ»;
– «Основы дискретной математики»;
– «Основы теории вероятности и математической статистики»;
– «Численные методы линейной алгебры».

Учебным планом по дисциплине предусмотрено выполнение 1 домашней контрольной работы.

Итоговой формой контроля знаний и умений студентов-заочников по данному курсу является дифференцированный зачет.

Рабочая программа учебной дисциплины «Математика» рассмотрена на заседании ПЦК общепрофессиональных и специальных дисциплин, утверждена зам.директора по УПР.

2.1. <u>Содержание дисциплины</u>

Тематический план

№ раздела	Наименование раздела	Максимальная нагрузка	Количество часов		
			Аудиторная нагрузка	Из них ЛПР	Внеаудиторная нагрузка
1.	Математический анализ	23	3	2	20
2.	Основы дискретной математики	5	1	-	4
3	Основы теории вероятности и математической статистики	14	4	1	10
4	Численные методы линейной алгебры	12	2	1	10
	Всего часов	**54**	**10**	**4**	**44**

Содержание

Введение

Студент должен:

иметь представление:

– о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин, а также о ее прикладном значении (в профессиональной деятельности).

Дидактические единицы:

История возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин. Цели, задачи математики. Связь математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1.1. Дифференциальное исчисление

Студент должен:

знать:

– первый и второй замечательные пределы;
– определение производной, ее геометрический смысл;
– таблицу производных;
– формулы производных суммы, произведения, частного;

уметь:
– вычислять производные функции при данном значении аргумента;
– исследовать функции с помощью производной и строить графики.

Дидактические единицы:

Функции одной переменной. Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование функций. Замена переменной.

Практическая работа №1

Рекомендации и пояснения к теме 1.1

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Правила дифференцирования:

$$(c\cdot u(x))'=c\cdot u'(x),\, c=const$$
$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$$
$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},\, v(x)\neq 0$$

$$y(u(x))'_x\Big|_{x=x_0}=y'(u)\Big|_{u=u_0}\cdot u'(x)\Big|_{x=x_0}$$

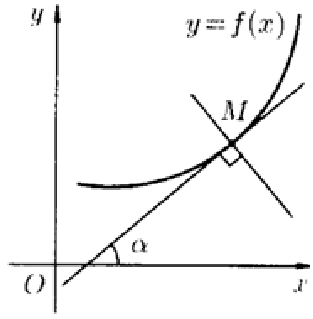
Таблица производных:

1. $c'=0,\ c=\text{const}$
2. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$
4. $\left(e^x\right)'=e^x$
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$
17. $(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$
18. $(\mathrm{th}\,x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$
19. $(\mathrm{th}\,x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$

Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$, вычисленная при заданном значении x, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$$



Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Примеры решения типовых задач:

1. Задание. Найти производную функции $y = 3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^3}$

Решение. Для нахождения производной данной функции используем правила дифференцирования и таблицу производных. Так как производная суммы/разности равна сумме/разности производных, то

$$y' = \left(3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x^3}\right)' = \left(3x^2\right)' + \left(5\sqrt[3]{x^5}\right)' - \left(\frac{4}{x^3}\right)'$$

постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$y' = 3\cdot\left(x^2\right)' + 5\cdot\left(x^{\frac{5}{3}}\right)' - 4\cdot\left(x^{-3}\right)'$$

Воспользуемся формулой для производной степенной функции:

$$y' = 3\cdot 2x^{2-1} + 5\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - 4\cdot\left(-3\cdot x^{-3-1}\right)$$

$$y' = 6x + \frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}} + 12x^{-4}$$

$$y' = 6x + \frac{25}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x^4}$$

Ответ. $y' = 6x + \dfrac{25}{3}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{12}{x^4}$

2. Задание. Найти производную функции $y = x^3\sin x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения получаем:

$$y' = \left(x^3\sin x\right)' = \left(x^3\right)'\cdot\sin x + x^3\cdot(\sin x)'$$

теперь воспользуемся формулами для производных степенной и тригонометрической функций:

$$y' = 3x^{3-1}\sin x + x^3\cos x$$
$$y' = 3x^2\sin x + x^3\cos x$$

Ответ. $y' = 3x^2\sin x + x^3\cos x$

3. Задание. Найти производную функции $y = e^x \mathrm{tg} x$

Решение. По свойству дифференцирования произведения

$$y' = (e^x \cdot \mathrm{tg} x)' = (e^x)' \cdot \mathrm{tg} x + e^x \cdot (\mathrm{tg} x)'$$

теперь воспользуемся формулами из таблицы производных - формулами для производных показательной и тригонометрической функций:

$$y' = e^x \mathrm{tg} x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = e^x \mathrm{tg} x + \frac{e^x}{\cos^2 x} = e^x\left(\mathrm{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Ответ. $y' = e^x\left(\mathrm{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

Вопросы для самоконтроля:

1. Первый и второй замечательные пределы
2. Производная и ее геометрический смысл.
3. Правила дифференцирования.
4. Таблица производных элементарных функций.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Студент должен:

знать:

- основные методы интегрирования;
- таблицу простейших интегралов;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- определение частной производной;
- свойства определенного и неопределенного интегралов;

уметь:

- интегрировать простейшие определенные интегралы;
- вычислять площади плоских фигур;
- находить частные производные различных порядков.

Дидактические единицы:

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Функции нескольких переменных. Приложение интеграла к решению прикладных задач. Частные производные.

Практическая работа №2

Рекомендации и пояснения к теме 1.2

Таблица первообразных

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x)=k$	$F(x)=kx$	6) $f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
2) $f(x)=x^r$ $(r\neq -1)$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$	7) $f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
		8) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
3) $f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$	9) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
4) $f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
5) $f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=F(x)+C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha\cdot f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$$

5. Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

6. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то и $\int f(u)du=F(u)+C$, где функция $u=\phi(x)$ - произвольная функция с непрерывной производной.

Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Примеры решения типовых задач:

1. Задание. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 dx$

Решение. Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

В нашем случае $n = 5$, тогда искомый интеграл равен:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Ответ. $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$

2. Задание. Вычислить определённый интеграл $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx.$

Решение. Сначала найдём неопределённый интеграл: $\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{1/3} dx = \dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C = \dfrac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + C.$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной $\dfrac{3}{4} x\sqrt[3]{x}$ (при $C = 0$), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x}\,\Big|_0^8 = \frac{3}{4} \bullet 8\sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Ответ: 12.

3. Задание. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 e^{2x}dx.$

Решение. Используя формулу $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$ получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Ответ: $\frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Таблица первообразных.
2. Неопределенный интеграл.
3. Определенный интеграл.
4. Геометрический смысл определенного интеграла.

Тема 1.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Студент должен:

знать:

- типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям;
- определение дифференциального уравнения;
- определение общего и частного решений дифференциальных уравнений, их геометрической интерпретации;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка;

уметь:

- составлять дифференциальные уравнения на простейших задачах;
- решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Дидактические единицы:

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Практическая работа № 3

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

Решение. В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде:
$y' = \frac{dy}{dx}$

Итак: $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

По правилу пропорции: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Переменные разделены.

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

В данном случае интегралы табличные: $\ln|y| = \ln|x| + C$.

После того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

ВМЕСТО записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

$\ln|y| = \ln|Cx|$

$y = Cx$

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

Переписываем производную в нужном виде: $\frac{dy}{dx} = -2y$

Очевидно, что переменные можно разделить:

$\frac{dy}{y} = -2dx$

Интегрируем уравнение:

$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$

$\ln|y| = -2x + C^*$

Общий интеграл получен.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение. В данном случае: $y = e^{-2x+C^*}$

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом: $y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C: $y = Ce^{-2x}$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

Необходимо подобрать такое значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$: $y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения.
5. Линейные дифференциальные уравнения.

Тема 1.4. Частные производные

Студент должен:

знать:

- определение функции двух и многих переменных;
- предел и непрерывность функции двух переменных;
- частные производные функции двух переменных;
- частные производные высших порядков;
- уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности;

уметь:

- находить область определения функции многих переменных;
- находить частные производные функции двух переменных;
- находить частные и полные дифференциалы;
- записывать уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности;
- находить частные производные и дифференциалы высших порядков.

Дидактические единицы:

Функция многих переменных. Область определения функции многих переменных. Частные производные функции двух переменных. Частные и полные дифференциалы. Уравнение нормали к поверхности. Уравнение касательной плоскости к поверхности.

Практическая работа № 4.

Рекомендации и пояснения к теме 1.4

Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций**.**

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Решение: Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$

$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$

$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих с подстрочным индексом**.**

(2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Упрощаем.

Сначала найдем смешанные производные второго порядка:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по x. Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по x еще раз: $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$

Аналогично: $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$

Пример 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0$ в точке $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

Решение: если поверхность задана уравнением $F(x;\ y;\ z) = 0$ *(т.е. неявно)*, то уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ можно найти по следующей формуле: $F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$

$$F'_x = (6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3)'_x = 6y - 2 \cdot 2x - y^2 - 0 + 0 = 6y - 4x - y^2$$

Найдём частную производную в точке: $F'_x(M_0) = F'_x(1;\ 2;\ 3) = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2^2 = 12 - 4 - 4 = 4$

Аналогично:

$$F'_y = (6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3)'_y = 6x - 0 - x \cdot 2y - 0 + 0 = 6x - 2xy$$

$$F'_y(M_0) = F'_y(1;\ 2;\ 3) = 6 - 4 = 2$$

$$F'_z = (6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3)'_z = 0 - 0 - 0 - 2z + 0 = -2z$$

$$F'_z(M_0) = F'_z(1;\ 2;\ 3) = -6$$

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

$$4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) - 6 \cdot (z - 3) = 0$$

$$4x - 4 + 2y - 4 - 6z + 18 = 0$$

$$4x + 2y - 6z + 10 = 0$$

$2x + y - 3z + 5 = 0$ – общее уравнение искомой касательной плоскости.

Сначала нужно убедиться, что координаты точки касания $M_0(1;\,2;\,3)$ действительно удовлетворяют найденному уравнению:

$2\cdot 1+2-3\cdot 3+5=0$

$2+2-9+5=0$

$0=0$ – верное равенство.

Составим уравнение нормали по точке M_0 и направляющему вектору

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

$\bar{n}$: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$

Ответ: $2x+y-3z+5=0,\quad \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Функция нескольких переменных.
2. Частные производные функции двух переменных.
3. Уравнение нормали к поверхности.
4. Уравнение касательной плоскости к поверхности.

Тема 1.5. Ряды

Студент должен:

знать:

- определения числовых и функциональных рядов;
- необходимый и достаточный признаки сходимости рядов, признак Даламбера;

уметь:

- определять сходимость числовых рядов по признаку Даламбера;

Дидактические единицы:

Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов. Признак сходимости Даламбера. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Практическая работа № 5

Рекомендации и пояснения к теме 1.5

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то:

а) При $D<1$ ряд сходится**.** В частности, ряд сходится при $D=0$.

б) При $D>1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D=\infty$.

в) При $D=1$ признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 2^2}+\frac{1}{3\bullet 2^2}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots .$$

Решение. Члены данного ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося геометрического ряда с общим членом $u_n = 1/2^n$: $\frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$ $(n = 1,2,3\ldots)$.
Согласно признаку сравнения, данный ряд также сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом. Первые их члены совпадают, а остальные члены данного ряда больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда: $1/\sqrt{n} > 1/n$, поскольку $\sqrt{n} < n$ $(n = 2,3,\ldots)$.

Согласно признаку сравнения, данный ряд также расходится.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$.

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot\left(n^2+2n+1+n+1-1\right)}{4\cdot 4^n\cdot\left(n^2+n-1\right)}\overset{(4)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right)\overset{(6)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}\right)\overset{(7)}{=}\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Из условия мы видим, что общий член ряда $a_n=\frac{n^2+n-1}{4^n}$. Для того, чтобы получить следующий член ряда необходимо вместо n подставить $n+1$: $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}$.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби. При определенном опыте решения этот шаг можно пропускать.

(3) В числителе раскрываем скобки. В знаменателе выносим четверку из степени.

(4) Сокращаем на 4^n. Константу $\frac{1}{4}$ выносим за знак предела. В числителе в скобках приводим подобные слагаемые.

(5) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ устраняется стандартным способом – делением числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.

(6) Почленно делим числители на знаменатели, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

(7) Упрощаем ответ и делаем пометку, что $\frac{1}{4} < 1$ с выводом о том, что, по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Вопросы для самоконтроля:

1. Числовой ряд.
2. Сумма числового ряда.
3. Необходимое условие сходимости ряда.
4. Признак Даламбера сходимости рядов.

Раздел 2. Основы дискретной математики

Тема 2.1 Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами

Студент должен:

знать:

- понятия: множество, элемент множества, конечное множество, пустое множество, бесконечное множество, счетное множество;
- способы задания множеств;
- основные операции над множествами и их свойства;
- виды отношений на множествах;
- свойства отношений;

уметь:

- решать задачи с применением кругов Эйлера.

***Дидактические* единицы:**

Множество. Элементы множества. Примеры множеств. Операции над множествами и их свойства. Круги Эйлера. Отношения на множествах. Свойства отношений.

Вопросы для самоконтроля:

1. Множества: примеры, свойства.
2. Основные операции над множествами.
3. Отношения на множествах.
4. Свойства отношений на множествах.

Тема 2.2 Основные понятия теории графов.

Студент должен:

знать:

- понятия: граф, степень вершины графа, маршрут, цикл, цепь;
- приложения теории графов;
- понятие ориентированного графа;
- операции над графами;
- способы задания графов;

уметь:

– решать задачи с графов.

Дидактические единицы:

Понятие графа. Приложения теории графов. Основные понятия в графе. Ориентированный граф и его понятия. Операции над графами. Способы задания графов. Виды графов.

Вопросы для самоконтроля:

1. Граф: основные понятия.
2. Приложения теории графов.
3. Операции над графами.
4. Способы задания графов.

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1. Элементы теории вероятностей. Случайная величина, ее функция распределения

Студент должен:

знать:

– понятия: событие, частота и вероятность появления события, совместные и несовместные события, полная вероятность;
– теорему сложения вероятностей;
– теорему умножения вероятностей;
– основные формулы комбинаторики;
– способы задания случайной величины;
– определения непрерывной и дискретной случайных величин;
– закон распределения случайной величины;

уметь:

– находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей;
– решать задачи с применением теоремы сложения вероятностей для несовместных событий;
– решать комбинаторные задачи;
– строить ряд распределения случайной величины;
– находить функцию распределения случайной величины.

Дидактические единицы:

Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез. Основные формулы комбинаторики. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.

Практическая работа № 6.

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости, на каждой из граней которой проставлено число очков (от 1 до 6). Какова вероятность того, что: 1) выпадает 2 очка? 2) выпадает нечетное число очков?

Решение 1: В данном испытании имеется 6 равновозможных случаев (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков), так как нет оснований предполагать, что появление какого-то определенного числа очков более вероятно (если, конечно, кость симметрична). Поэтому вероятность выпадения любого числа очков, в том числе и 2, при одном подбрасывании равна $\frac{1}{6}$.

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют три случая (выпадение 1, 3 и 5), поэтому по формуле получаем

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Решение 2: В данном испытании имеется 2 равновозможных исхода (выпадение четного числа очков (т.е. 2, 4, 6) и нечетного), так как кость симметрична, то очевидно, что эти исходы равновозможные.

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют 1 случай из двух, поэтому по формуле получаем $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Отметим, что построенную таким образом пространство элементарных событий непригодно для расчета вероятности того, что выпадает 2 очка, так как этому событию не благоприятствует не один из введенных нами элементарных исходов.

Пример 2. В урне 5 белых и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

Решение. В этом примере имеется 15 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, причем ожидаемому событию (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому искомая вероятность составит $\frac{5}{15}$.

Пример 3. В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

Решение. Пусть событие A – появление белого или черного шара. Разобьем это событие на более простые. Пусть B_1 – появление белого шара, а B_2 – черного. Тогда, $A=B_1+B_2$ по определению суммы событий. Следовательно $P(A)=P(B_1+B_2)$. Так как B_1 и B_2 – несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий $P(B_1+B_2) = P(B_1)+P(B_2)$.

Вычислим вероятности событий B_1 и B_2. В этом примере имеется 35 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, событию B_1 (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому $P(B_1) = \frac{5}{35}$. Аналогично, $P(B_2) = \frac{10}{35}$. Следовательно, $P(A) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{30}$.

Пример 4.В совбезе ООН 11 членов: 5 постоянных и 6 так называемые ”малые нации”. Для принятия решении, надо, чтобы было 7 голосов ”ЗА”, причем следующим образом: все постоянные+как минимум 2 временных. Сколько всего вариантов голосования? Сколько всего можно организовать выигрышных коалиций? (Выигрышной коалицией называется такая, когда как бы не голосовали противники решение все равно будет принято.)

Решение. Так, как голосуют 11 делегаций и у них есть 2 выбора (“за”,”против”), то по принципу умножения имеем $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^{11} = 2048$– вариантов голосования. Так как все постоянные члены должны проголосовать ”за”, то выигрышная коалиция определяется только временными членами , а кол-во – количеством способов выбрать2 или 3 или 4 или 5 или 6 временных членов, голосующих ”за”.

Имеем $1\cdot\left(C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6\right)=15+20+15+6+1=57$ способов, причем 15 – число так называемых **минимальных** выигрышных коалиций.

Вопросы для самоконтроля:

1. Событие и вероятность события.
2. Классическое определение вероятности.
3. Основные теоремы теории вероятностей.
4. Основные формулы комбинаторики.
5. Дискретная и непрерывная случайные величины.
6. Закон распределения случайной величины.

Тема 3.2. Математическое ожидание и дисперсия

Студент должен:

знать:

- определение математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины;
- среднее квадратичное отклонение случайной величины;

уметь:

- находить математическое ожидание и дисперсию случайной величины по заданному закону ее распределения;
- находить среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Дидактические единицы:

Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Практическая работа № 7

Примеры решения типовых задач:

Пример 1. Играем в следующую игру: один раз бросаем игральную кость и получаем столько $, сколько выпало очков. Цена игры: 4$. Выгодно ли играть?

Решение: Пусть X – количество очков, выпавшее при броске игральной кости.

Вычислим $M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$ – именно столько очков (а, значит, и $) «в среднем» мы будем получать если играть достаточно долго. Значит, игра невыгодна для нас. Мы «в среднем» теряем 0.5$ в каждой игре.

Для вычисления $D(X)$ обычно пользуются формулой $D(X) = M(X^2) – M^2(X)$.

X^2	1	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Вычислив $M(X^2)$=91/6 находим $D(X)$ = 91/6 – 441/36 = 105/36 = $2\frac{11}{12}$.

Пример 2. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
P	0.1	0.4	0.5

Найти среднее квадратичное отклонение σ(x)

Решение: Найдем математическое ожидание X: M(x)=2•0.1+3•0.4+10•0.5=6.4

Найдем математическое ожидание X^2: $M(x^2)=2^2•0.1+3^2•0.4+10^2•0.5=54$

Найдем дисперсию: $D(x)=M(x^2)=M(x^2)-[M(x)]^2=54-6.4^2=13.04$

Искомое среднее квадратичное отклонение σ(X)=√D(X)=√13.04≈3.61

Вопросы для самоконтроля:

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
2. Дисперсия случайной величины.
3. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Тема 3.3 Задачи математической статистики.

Студент должен:

знать:

– задачи математической статистики;
– генеральную и выборочную совокупность статистических данных;
– способы выборки;

уметь:

– оценивать параметры генеральной совокупности;
– строить полигоны частот и гистограммы частот.

Дидактические единицы:

Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупность статистических данных. Дискретный вариационный ряд. Интервальный вариационный ряд. Оценка параметров генеральной совокупности.

Вопросы для самоконтроля:

1. Задачи математической статистики.
2. Генеральная и выборочная совокупность статистических данных.
3. Параметры генеральной совокупности.
4. Полигон и гистограмма частот

Раздел 4. Численные методы линейной алгебры

Тема 4.1. Численные методы линейной алгебры

Студент должен:

знать:

– что такое численные методы и где они применяются;
– численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений;

уметь:

– решать системы линейный алгебраических уравнений несколькими методами.

Дидактические единицы:

Численные методы. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метода Гаусса. Метод прогонки.

Примеры решения типовых задач:

Задание. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и при помощи элементарных преобразований над ее строками приведем эту матрицу к ступенчатому виду (прямой ход) и далее выполним обратный ход метода Гаусса (сделаем нули выше главной диагонали). Вначале поменяем первую и вторую строку, чтобы элемент a_{11} равнялся 1 (это мы делаем для упрощения вычислений):

$$\widetilde{A} = A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Далее делаем нули под главной диагональю в первом столбце. Для этого от второй строки отнимаем две первых, от третьей - три первых:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Все элементы третьей строки делим на два (или, что тоже самое, умножаем на $\frac{1}{2}$):

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для удобства вычислений поменяем местами вторую и третью строки, чтобы диагональный элемент равнялся 1:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

От третьей строки отнимаем вторую, умноженную на 3:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Умножив третью строку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, получаем:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Проведем теперь обратный ход метода Гаусса (метод Гассу-Жордана), то есть сделаем нули над главной диагональю. Начнем с элементов третьего столбца. Надо обнулить элемент a_{23} , для этого от второй строки отнимем третью:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Далее обнуляем недиагональные элементы второго столбца, к первой строке прибавляем вторую:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Метода Гаусса.
3. Метод прогонки.

Тема 4.2 Численное интегрирование. Численное дифференцирование

Студент должен:

знать:

- способы представления функции в виде прямоугольников и трапеций;
- формулу Симпсона;
- выражения для определения предельных абсолютных погрешностей;
- апроксимацию производной;
- разностные отношения;

уметь:

- вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона;
- по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

Дидактические единицы:

Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона. Абсолютная погрешность при численном интегрировании. Численное дифференцирование. Аппроксимация производной. Разностные отношения. Погрешность в определении производной.

Практическая работа № 8

Примеры решения типовых задач:

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{x^2 \sin x}{10} dx$ методом прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на *10* частей.

Решение.

В нашем примере *a = 4, b = 9, n = 10,* $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$.

Внимательно посмотрим на формулу прямоугольников $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)}$.

Чтобы ее применить, нам нужно вычислить шаг *h* и значения функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$ в точках $\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, 10$.

Вычислим шаг: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-4}{10} = 0.5$.

Так как $x_{i-1} = a + (i-1) \cdot h, \quad i = 1, \ldots, 10$,

то $\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = a + (i-1) \cdot h + \frac{h}{2} = a + (i-0.5) \cdot h, \quad i = 1, \ldots, 10$.

Для *i = 1* имеем $x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_0 + \frac{h}{2} = a + (i-0.5) \cdot h = 4 + (1-0.5) \cdot 0.5 = 4.25$. Находим соответствующее значение функции

$$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(4.25) = \frac{(4.25)^2 \sin(4.25)}{10} \approx -1.616574.$$

Для *i = 2* имеем $x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_1 + \frac{h}{2} = a + (i-0.5) \cdot h = 4 + (2-0.5) \cdot 0.5 = 4.75$. Находим соответствующее значение функции $f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) = f(4.75) = \frac{(4.75)^2 \sin(4.75)}{10} \approx -2.254654$.

И так продолжаем вычисления до *i = 10*.

Вопросы для самоконтроля:

1. Формулы прямоугольников.

2. Формула трапеций.
3. Формула Симпсона.
4. Аппроксимация производной.
5. Разностные отношения.

2.2. Перечень практических работ

№ разде-ла	Наименование раздела програм-мы	Практические занятия	
		Тема	Количе-ство часов
1.	«Математический анализ»	1. «Дифференциальное и интегральное исчисление. Обыкновенные дифференциальные уравнения».	1
		2. «Частные производные. Ряды».	1
3.	«Основы теории вероятностей и математической статистики»	3. «Вероятность. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины»	1
4.	«Численные методы линейной алгебры»	4. «Численное решение СЛАУ. Численное интегрирование»	1

<u>2.3. Задания для контрольных работ</u>

<u>Примечание:</u>

Номер варианта задания контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. (Например, номер зачетной книжки 27, следовательно, номер задания для домашней контрольной работы №7)

В результате изучения дисциплины студент должен
уметь:

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- находить частные производные первого и второго порядков;
- исследовать ряды на сходимость;
- решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности;
- находить числовые характеристики случайной величины;
- использовать метод Гаусса для численного решения СЛАУ;
- вычислять не табличные интегралы;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Перечень заданий для выполнения контрольной домашней работы:

Задание 1

Вариант 1

1. Найти производную функции:
$$y(x) = 3x^5 - \sin(x)$$
2. Вычислить определенный интеграл:
$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x} - 3}$$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения:
$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2; \quad x_0 = -2, \quad y_0 = 5$$
4. Найти частные производные первого и второго порядков:
$$Z = x^2 + xy + 3y^2$$
5. Исследовать ряд на сходимость:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} x^n.$$
6. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?
7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x	-4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_3 + 9x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти производную функции:

$$y(x) = 4x^4 + e^x$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y' \cos(x) - 2y \sin(x) = 2; \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 3$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = x^2 - xy - 2$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n (5n+1)}} x^n.$$

6. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?
7. Случайная величина задана законом распределения:

x	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой величины.

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 8, \\ 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти производную функции:

$$y(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - \ln(x)$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y' \cos(x) + y \sin(x) = 1; \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = x^2 - 2xy - y^2 + x$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n (n+2)} x^n .$$

6. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?
7. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, зная ее закон распределения:

x	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти производную функции:

$$y(x) = 10x^3 + 2\cos(x)$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x} dx$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + 2y = \sin(x)$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:
   $Z = 5 + 2xy - x^2$
5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n .$$

6. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?
7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

x	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Найти производную функции:
$$y(x) = x^5 e^x$$
2. Вычислить определенный интеграл:
$$\int_0^4 \frac{dx}{5+\sqrt{x}}$$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения:
$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3; \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1/2$$
4. Найти частные производные первого и второго порядков:
$$Z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 1$$
5. Исследовать ряд на сходимость:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}.$$
6. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной (т.е. не белый) шарик?
7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

x	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Найти производную функции:
$$y(x) = \cos(x) \cdot (3x - 1)$$
2. Вычислить неопределенный интеграл:
$$\int (2x+5)\sin(x)dx$$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения:
$$y'\sin(x) - y\cos(x) = 1; \quad x_0 = \pi/2, \quad y_0 = 0$$
4. Найти частные производные первого и второго порядков:
$$Z = x^2 + 2xy + 2y^2$$
5. Исследовать ряд на сходимость:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n n} x^n.$$
6. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события *A* «сумма выпавших очков не превосходит четырех».

7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

x	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -11, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найти производную функции:

$$y(x) = 6 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 7tg(x)$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x \cdot e^{3x} dx$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' \cos(x) - 2y \sin(x) = 2$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = x^2 + y^2 + x - y$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n}{(n+1)^2} x^n.$$

6. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым (т.е. имеет в точности два делителя)?
7. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной рядом:

x	−1	2	5	10	20
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -27, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Найти производную функции:

$$y(x) = \frac{5\ln(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int (1-\ln(x))dx$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = 3 - x^2 - xy - y^2$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{n^n} x^n.$$

6. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?
7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины, заданной законом распределения:

x	2	3	5	6
p	0,1	0,3	0,1	0,5

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Найти производную функции:

$$y(x) = \frac{7}{5 \cdot \sqrt[7]{x^5}}$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int x^2 \cdot \sin(3x)dx$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' - 2y = x^3 \cos(x)$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = x^2 + 2y^2 - 1$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} x^n.$$

6. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках л, на остальных трех и. Выкладываются наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово лилии?
7. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Найти производную функции:

$$y(x) = \frac{5}{4 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{8 + x^3}$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0$$

4. Найти частные производные первого и второго порядков:

$$Z = x^2 - y^2 + 3xy + 7$$

5. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^n}}{n!} x^n.$$

6. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2?
7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

x	3	4	5	6	7
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

8. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -18, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -10. \end{cases}$$

Примечание:

Работы оформляются одним из двух способов: печатным или рукописным.

При оформлении печатным способом: работы оформляются на одной стороне стандартного листа формата А4 (210х297 мм) белой бумаги, текст оформляется шрифтом Times New Roman, кегль шрифта 14 пунктов, межстрочный интервал – полуторный.

Оформление работы в тетради - на обложку тетради наклеивается титульный лист, сама работа пишется разборчивым почерком.

Работа должна иметь общую нумерацию страниц. Номер страницы не ставится на титульном листе.

Для пометок рецензента должны быть оставлены поля шириной 4 см.

Образец заполнения титульного листа домашней контрольной работы

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Шатковский агротехнический техникум»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина

____

ФИО студента

____

____

____

Специальность

____

____

____

Группа__________________

Вариант _______

Домашний адрес

____

____

____

____

____

Проверил преподаватель

____

____

____

Шатки, 20____ г.

2.4. Типовые задания для дифференцированного зачета

1. Показать, $y=\sqrt{x^2+cx}$ что функция является решением дифференциального уравнения $2xyy^1=x^2+y^2$. Найти частное решение при н. у. y(-1) = 2.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $dy=\left(2x^2-5\right)dx$.

3. Найти частные производные функции: $z=-3xyz^2+2x^3y^2z-xy+zy+5$.

4. Найти частные производные функции: $z=xy+xz+zy^2-4x^2y+2yz^2+2$.

5. Найти математическое ожидание случайных величин Х и У, зная законы их распределения:

X	- 8	- 4	- 1	1	3	7
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Y	- 2	- 1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

6. Найти среднее квадратичное отклонение, зная закон распределения случайной величины:

X	- 2	- 1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

7. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков хотя бы один раз выпадет 6 очков.

8. Определить сходимость ряда по общему члену

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}.$$

9. Найти производную функции

$$\sqrt[3]{5x}.$$

10. Найти производную функции

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

11. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2\frac{dx}{x^3}.$$

12. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^3 6x^2.$$

13. Вычислить определенный интеграл используя формулой левых прямоугольников при n=6:

$$\int_2^8\sqrt{x+2}dx.$$

14. Вычислить определенный интеграл используя формулой правых прямоугольников при n=8:

$$\int_1^9 \frac{1}{x+1}dx$$

15. Написать уравнение касательной к параболе $y = 2x^2$ в точке *(2;1)*

16. Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если $f(x) = x^2 + 5x$

17. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке *(1; 1).*

18. Найти значение *k* и *b*, если прямая *y = kx + b* проходит через точку (x_0, y_0) и образует с осью *Ох* угол α: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;

19. Найти значение *k* и *b*, если прямая *y = kx + b* проходит через точку (x_0, y_0) и образует с осью *Ох* угол α: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$

20. Вычислить определенный интеграл $\int_3^7 dx$.

21. Определить сходимость ряда по признаку Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)!}$

22. Определить сходимость ряда по признаку Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

23. В ящике 40 шаров: 20 белых, 15 черных, 5 цветных. Найти вероятность того, что наугад взятый шар будет не цветным?

24. Из полного набора домино (28 пластин) наудачу выбирается одна. Какова вероятность появления пластины, сумма очков которой равна 6?

25. Игральную 1 раз две игральные кости. Определить вероятность выпадения очков, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

26. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

27. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

28. Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если $f(x) = 4x - 2x^3 - 1$

29. Составить уравнение касательной и нормали к поверхности $xyz + 2x^2y - xy^3z - y^2 + x - 2 = 0$ в точке $M_0(1;-1;2)$

30. Составить уравнение касательной и нормали к поверхности $2xyz + 3x^2y - xy^3 - y^2z - xz + 1 = 0$ в точке $M_0(1;-1;2)$

2.5. Перечень рекомендуемой литературы

Основная:

1. Григорьев С.Г. Математика/Под редакцией Гусева В.А. - М.: Академия, 2014г.
2. Григорьев В.П. Элементы высшей математики. - М.: Академия, 2007г.
3. Пехлецкий И.Д. Математика. - М.: Мастерство, 2014г.
4. Исаков В.Н. Элементы численных методов. - М.: Академия, 2003г.
5. Баврин И.И. Высшая математика. - М.: Академия, 2006г.

Дополнительная:

1. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики 4-6-е изд. - М.: Наука, 2007г.
2. Пискунов И. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (любое изд.). – М.: Наука, 2001г.
3. О.А.Афанасьева и др. Сборник задач по математике: для техникумов на базе средней школы – М.: Наука, 1987г.

Интернет ресурсы:

http://www.urtt.ru/bib/dataindex/dm/glava_2~.htm
http://www.bymath.net/studyguide/sets/sets_topics.html
http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-3-html/1.htm
http://qo.do.am/publ/teorija
http://cyclowiki.org/w
http://physics.herzen.spb.ru/library/01/01/nm_labs/differ_integration.htm